PETRE NĂCHILĂ

Analiză matematică pentru toți

Clasa a XI-a

Editura NOMINA

Cuprins

Capitolul 1

FUNCŢII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

1.1. Mulţimea numerelor reale

Reamintim mulţimile de numere reale studiate:

- mulţimea numerelor *naturale*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;
- mulţimea numerelor *întregi*: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm n, \ldots\}$;
- mulţimea numerelor *raţionale*: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$.

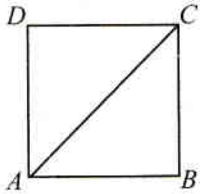


Fig. 1

Amintim un exemplu semnificativ prin care s-a evidenţiat existenţa numerelor care nu sunt raţionale: calculul lungimii diagonalei unui pătrat de latură 1 (figura 1).

Avem: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$. S-a arătat că $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Numărul $\sqrt{2}$ este un exemplu de număr *iraţional*.

Am notat cu $\mathbb{I}$ mulţimea numerelor iraţionale şi cu $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ mulţimea numerelor *reale*. Evident, avem: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

În cele ce urmează vom aprofunda noţiunea de mulţime a numerelor reale. Dăm mai întâi o definiţie axiomatică a mulţimii numerelor reale.

Definiţie. *Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale* este mulţimea pe care sunt definite operaţia de adunare „+", $+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, operaţia de înmulţire „·", $\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ şi relaţia de inegalitate „≤" care satisfac următoarele axiome:

I. $\mathbb{R}$ cu + şi · are proprietăţile:

Operaţia „+" are proprietăţile:

A: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*asociativitate*);

N: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 + x = x + 0 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (0 – „zero" este *element neutru* pentru operaţia „+");

S: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists\, (-x) \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Numărul $-x$ este *opusul* lui x.

C: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = y + x$ (*comutativitate*).

Operaţia „·" are proprietăţile:

A: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (*asociativitate*);

N: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ (1 – „unu" este *element neutru* pentru operaţia „·");

S: $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ (x^{-1} este *inversul* numărului real x);

C: $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$ (*comutativitate*).

În plus, „+" și „·" au și proprietatea:

D: $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*distributivitatea* operației „·" față de „+").

II. Relația „≤" are proprietățile:

$x \leq x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (*reflexivitate*);

$x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (*antisimetrie*);

$x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (*tranzitivitate*).

Relația „≤" este compatibilă cu operațiile „+" și „·", adică:

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall\, z \in \mathbb{R}$;

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z, \forall\, z \in \mathbb{R}_+^*$ sau $x \cdot z \geq y \cdot z, \forall\, z \in \mathbb{R}_-^*$.

În plus, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ sau $y \leq x$.

III. Axioma lui Cantor: $\forall\, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing, A$ admite un cel mai mic element.

Definiție. Un element al mulțimii $\mathbb{R}$ se numește *număr real*.

Existența și unicitatea mulțimii numerelor reale a fost demonstrată în moduri diferite de matematicienii germani Dedekind (1831 – 1916), Cantor (1845 – 1918) și Weierstrass (1815 – 1897).

În clasa a IX-a au fost introduse numerele reale după modelul lui Weierstrass, astfel:

- orice număr rațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală infinită periodică, având perioada diferită de 9;
- orice număr irațional se reprezintă sub formă de fracție zecimală infinită neperiodică.

Pe mulțimea $\mathbb{R}$ astfel introdusă am definit structura algebrică (operațiile „+" și „·" și structura de ordine (relația „≤"). În cele ce urmează vom face câteva aplicații în legătură cu structura algebrică și structura de ordine a mulțimii numerelor reale.

Probleme rezolvate

1. Demonstrați **inegalitatea lui Bernoulli**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \forall\, x > -1, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Soluție. Demonstrăm inegalitatea notată cu $P(n)$, prin inducție matematică. Pentru $n = 0$ și $n = 1$ inegalitatea se verifică (este o egalitate). Presupunem $P(n)$ adevărată și demonstrăm că $P(n + 1)$ este adevărată. Avem:

$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$.

În concluzie, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ este adevărată.

2. Demonstrați **inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky-Schwarz**:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),\ \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}.$$

Soluție. Pornim de la inegalitatea evidentă: $\sum_{i=1}^{n}(a_i x - b_i)^2 \ge 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Obținem inegalitatea echivalentă: $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Inegalitate este echivalentă cu $\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Probleme propuse

1. Folosind axiomele structurii algebrice a lui $\mathbb{R}$, arătați că:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

b) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$;

c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$;

d) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, -(x) \cdot (-y) = x \cdot y$;

e) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, -(x + y) = (-x) + (-y)$.

2. Folosind axiomele structurii de ordine a lui $\mathbb{R}$, arătați că:

a) $\forall\, x, y, a, b \in \mathbb{R}, x \le y$ și $a \le b \Rightarrow x + a \le y + b$;

b) $\forall\, x, y, a, b \in \mathbb{R}, 0 \le x \le y$ și $0 \le a \le b \Rightarrow xa \le by$;

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, x \le y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$;

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > 0, y > 0, x \le y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \le 1$.

3. Demonstrați **identitatea lui Catalan**:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n},\ n \ge 1.$$

4. Demonstrați **inegalitățile dintre medii** pentru două numere reale, strict pozitive, a_1, a_2 și apoi pentru n numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$m_h \le m_g \le m_a \le m_h \text{ (\textbf{Cauchy}, 1821)},$$

cu egalitate atunci când $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Amintim că: $m_h = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}}$, $m_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$, $m_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$, $m_p = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}$.

5. Demonstrați prin inducție matematică inegalitatea lui Cauchy–Buniakovski–Schwarz.

6. Fie $a_i > -1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, toate având același semn. Arătați că:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Deduceți de aici inegalitatea lui Bernoulli.

7. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ și $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Atunci:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

8. Fie $a \geq 0$, $b \geq 0$, cu $a + b + ab = 3$. Demonstrați că $a + b \geq 2$.

9. Fie $x, y, z \in (0, 1)$, cu $x + y + z = 2$. Demonstrați că $\dfrac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} \geq 8$.

10. Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Atunci $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$, $n \geq 2$ (**Minkowski**).

11. Fie $a, b, c > 0$, cu $a + b + c = 2$. Demonstrați că $\dfrac{a}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{b}{\sqrt{c+a}} + \dfrac{c}{\sqrt{a+b}} \geq 1$.

12. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $[x] + [y] \leq [x] + [y]$;

b) $[x] = [y] \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} < \dfrac{3}{4}$.

15. Dacă $a, b, x, y \in (0, \infty)$, cu $a + b = 1$, atunci $\dfrac{1}{\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}} \leq ax + by$.

1.2. Reprezentarea geometrică a numerelor reale

Amintim că am reprezentat numerele reale pe axa reală. *Axa reală* este orice axă de coordonate, adică o dreaptă pe care am fixat:

- un punct O (originea de măsurare pe axă);
- un sens pozitiv de măsurare a distanţelor dintre punctele axei (dat de vectorul $\overrightarrow{OA}$);
- o unitate de măsură ($|\overrightarrow{OA}| = 1$) (figura 2).

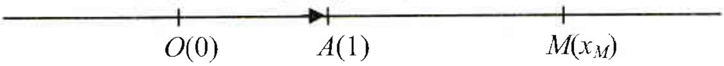


Fig. 2

Semidreapta $(OA$ am numit-o *semiaxa pozitivă*, iar semidreapta opusă am numit-o *semiaxa negativă*.

Am asociat fiecărui punct M al axei de coordonate un număr real, x_M, numit *coordonata punctului M pe axă*, astfel: $x_M = OM$ dacă M aparţine semiaxei pozitive şi $x_M = -OM$ dacă M aparţine semiaxei negative.

În acest mod, orice axă de coordonate reprezintă mulţimea numerelor reale deoarece: oricare ar fi M aparţinând axei, există un unic număr real x egal cu coordonata x_M a punctului M pe axă; oricare ar fi numărul $x \in \mathbb{R}$, există un unic punct M pe axă astfel încât $x_M = x$.

Numerele reale $-\sqrt{10}, -3, -2, -\frac{5}{3}, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, \sqrt{5}, 3$ se pot reprezenta pe axa reală ca în figura 3:

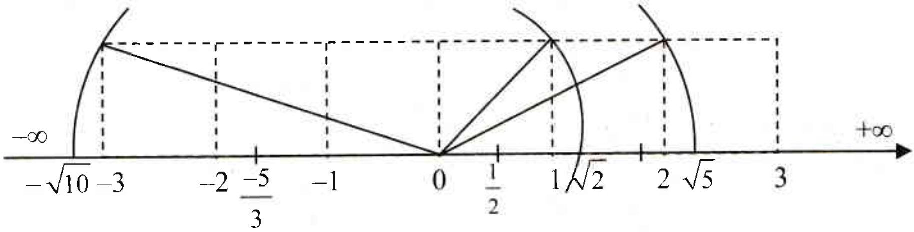


Fig. 3

Prin distanţa dintre $P(x)$ şi $O(0)$ înţelegem $d[P(x), O] = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Prin $|x|$ citim „modulul" numărului real x.

Distanţa dintre punctele $P(x)$ şi $P(y)$ este $d[P(x), P(y)] = |x - y|$.

Vom extinde mulţimea numerelor reale cu două elemente arbitrare, $-\infty$ şi $+\infty$.

Definiţie. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale şi $-\infty$, $+\infty$ două elemente arbitrare care nu aparţin lui $\mathbb{R}$. Definim $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pe $\mathbb{R}$ extindem relaţia de ordine astfel: $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \leq y$, dacă $x = -\infty$ şi $y = +\infty$ sau dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$ cu relaţia de ordine totală astfel definită se numeşte *dreapta reală completă*.

Operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ se extind, astfel:

- *Operaţii fără sens* (nedeterminări): $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 0^0, ∞^0, 1^∞;
- *Operaţii cu sens*: $x + \infty = +\infty + x = +\infty$, $\forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$;

$$x - \infty = -\infty + x = -\infty,\ \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\};$$

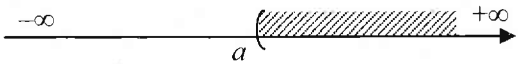
$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ \mp\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{\pm\infty\};$$

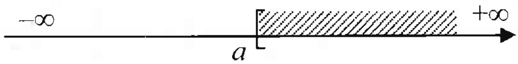
$$\frac{\pm\infty}{x} = (\pm\infty) \cdot \left(\frac{1}{x}\right),\ \text{dacă } x \neq \pm\infty \text{ şi } x \neq 0.$$

Definiţie. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Următoarele mulţimi de numere reale sunt intervale în $\mathbb{R}$:

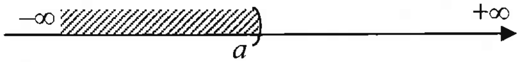
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\} \overset{\text{not.}}{=} (a, +\infty)$



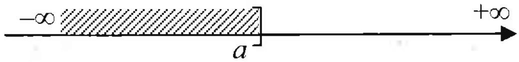
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\} \overset{\text{not.}}{=} [a, +\infty)$



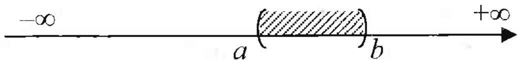
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\} \overset{\text{not.}}{=} (-\infty, a)$



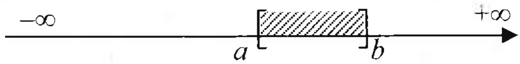
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\} \overset{\text{not.}}{=} (-\infty, a]$



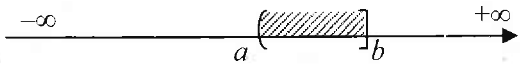
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \overset{\text{not.}}{=} (a, b)$



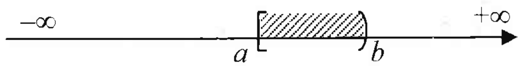
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \overset{\text{not.}}{=} [a, b]$



$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \overset{\text{not.}}{=} (a, b]$



$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \overset{\text{not.}}{=} [a, b)$

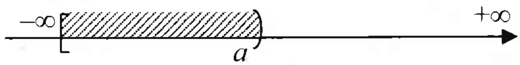


$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

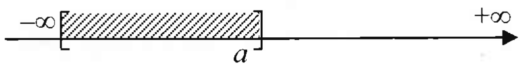
Definiţie. Mulţimile definite mai sus sunt intervale şi în $\overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele mulţimi sunt intervale numai în $\overline{\mathbb{R}}$.

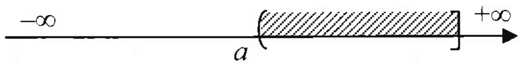
$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x < a\} \overset{\text{not.}}{=} [-\infty, a)$



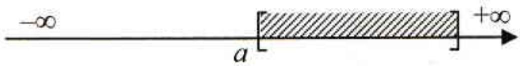
$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq a\} \overset{\text{not.}}{=} [-\infty, a]$



$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x > a\} \overset{\text{not.}}{=} (a, +\infty]$



$\{x \mid x \in \overline{\mathbb{R}}, x \geq a\} \overset{\text{not.}}{=} [a, +\infty]$



$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea un interval din $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţie. Următoarele *intervale* sunt *deschise* în $\mathbb{R}$: $(a, +\infty)$; $(-\infty, a)$; (a, b); $(-\infty, +\infty)$.

Următoarele intervale sunt deschise în $\overline{\mathbb{R}}$: (a, b); $(a, +\infty]$; $[-\infty, a)$; $[-\infty, +\infty]$.

Intervalul $[a, b]$ este *închis* în $\mathbb{R}$.

Intervalele $(a, b]$ şi $[a, b)$ sunt deschise la stânga şi închise la dreapta, respectiv închise la stânga şi deschise la dreapta.

Definiţie. Fie x_0 un număr real fixat. Se numeşte *vecinătate* a punctului x_0 în $\mathbb{R}$ o mulţime $V \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că există I un interval din $\mathbb{R}$ astfel încât $x_0 \in I \subset V$.

Notaţie. Prin $V(x_0)$ notăm mulţimea vecinătăţilor punctului x_0.

Exemple:

1. $(0, 1)$ este o vecinătate a lui $\frac{1}{2}$; $(0, 1) \in V\left(\frac{1}{2}\right)$ (figura 4);

2. $(0, 1) \notin V(0)$;

3. $(2, +\infty) \in V(4)$ (figura 5).

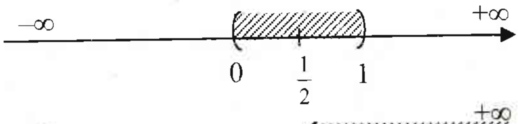


Fig. 4

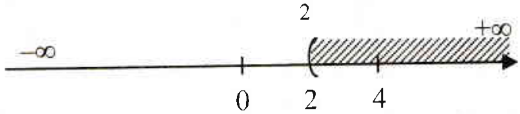


Fig. 5

Definiţie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat. O vecinătate $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\forall\ \varepsilon > 0$, se numeşte *vecinătate simetrică* a punctului x_0 (figura 6).

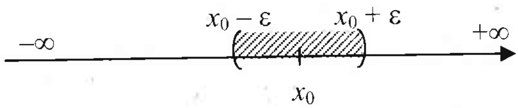


Fig. 6

Observaţii.

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, atunci există $V \in V(a)$ şi $W \in V(b)$ astfel încât $V \cap W = \varnothing$.

Fie $a < b$; $V = \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \in V(a)$, $W = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{2}\right) \in V(b)$ şi $V \cap W = \varnothing$.

2. Intersecţia tuturor vecinătăţilor lui x_0 este $\{x_0\}$.

Definiţie. Se numeşte *vecinătate* a lui $-\infty$ (respectiv a lui $+\infty$) în $\mathbb{R}$ intervalul $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$ (respectiv intervalul $(x, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$).

Exemple. $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, 0]$ este o vecinătate a lui $-\infty$. $\overline{\mathbb{R}}$ este o vecinătate a oricărui punct din $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ nu este o vecinătate a lui $-\infty$ şi $+\infty$.

Probleme rezolvate

1. Arătaţi că:

a) $|x+y| \le |x|+|y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$; b) $\left|x+\dfrac{a+b}{2}\right| \le \dfrac{1}{2}(|x-a|+|y-b|)$, $a, b, x \in \mathbb{R}$.

Soluţie: a) Dacă $x + y \ge 0$ atunci, din definiţia modulului, rezultă că $|x+y| = x+y$. Dacă $x + y < 0$, atunci $|x + y| = -(x + y) = -x - y = |-x| + |-y| = |x| + |y|$ (am folosit proprietatea modulului $|-x| = |x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$).

b) Aplicăm rezultatul de la punctul a) („inegalitatea triunghiului") şi obţinem:

$$\left|x+\frac{a+b}{2}\right| \le \frac{1}{2}|2x-(a+b| = \frac{1}{2}|(x-a)+(y-b)| \le \frac{1}{2}(|x-a|+|y-b|),\ \forall\, x, a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Fie $V \in V(x_0)$ şi $W \in V(x_0)$. Arătaţi că $V \cap W \in V(x_0)$.

Soluţie: $V \in V(x_0) \Rightarrow \exists\, I \subset V$, interval, astfel încât $x_0 \in I \subset V$ (1); $W \in V(x_0) \Rightarrow \exists\, J \subset V$, interval, astfel încât $x_0 \in J \subset W$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow x_0 \in I \cap J \subset V \cap W$. Deci $V \cap W \in V(x_0)$.

Probleme propuse

1. Reprezentaţi pe axa numerelor reale punctele -1 şi $\sqrt{3}$. Determinaţi toate intervalele deschise de numere reale formate pe axa numerelor reale având ca extremităţi aceste numere. Arătaţi că intervalul $\left[-1, \sqrt{3}\right]$ este vecinătate a oricărui număr $x_0 \in \left(-1, \sqrt{3}\right)$, dar nu şi pentru $x_0 \in \left\{-1, \sqrt{3}\right\}$.

2. Demonstraţi următoarele proprietăţi ale modulului:

a) $|x| \ge 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; b) $|x| = |-x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$; d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|},\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ y \ne 0$;

e) $|x + y| \le |x| + |y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (vezi exerciţiul rezolvat).

3. Arătaţi că:

a) $|x| \le \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow -\varepsilon \le x \le \varepsilon$; b) $|x| > \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x < -\varepsilon$ sau $x > \varepsilon$.

4. Demonstraţi că $||x| - |y|| \le |x - y|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

5. Arătaţi că $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|,\ \forall\, x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}$.

6. Fie $d(x, y) = |x - y|$, distanţa dintre punctele de coordonate x, respectiv y. Arătaţi că:

a) $d(x, y) \ge 0,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; b) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

c) $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z),\ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

7. Reprezentaţi pe axa numerelor reale intervalele $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $(-1, 5)$, (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi pentru fiecare interval, punctul $a \in \mathbb{R}$ pentru care intervalele sunt vecinătăţi simetrice.

8. Arătaţi că $\forall\ V \in \mathcal{V}(x_0)$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\left(x - \dfrac{1}{n_0},\ x + \dfrac{1}{n_0}\right) \subset V$.

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Definim $\max(a, b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & a < b \end{cases}$ şi $\min(a, b) = \begin{cases} a, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}$. Demonstraţi că $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ şi $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

10. Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, arătaţi că:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (1 - \lambda)a + \lambda b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

11. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *convexă* dacă:

$$\forall\ x, y \in A \text{ şi } 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow (1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

Arătaţi că următoarele propoziţii sunt echivalente:

i) A este interval în $\mathbb{R}$;

ii) $\forall\ x, y \in A$, $x < y \Rightarrow [x, y] \subseteq A$;

iii) A este o mulţime convexă din $\mathbb{R}$.

12. Arătaţi, aplicând eventual inegalitatea Cauchy–Buniakovsky–Schwarz, că:

a) $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$, $\forall\ a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$;

b) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall\ a, b, x \in \mathbb{R}$;

c) $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

13. Fie $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Un interval de forma $[a - r, a + r]$ sau $(a - r, a + r)$ se numeşte *interval centrat în a*. Demonstraţi că reuniunea şi intersecţia unui număr finit de intervale centrate în a sunt intervale centrate în a.

14. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi I un interval deschis, cu $a \in I$. Demonstraţi că există un interval deschis I' centrat în a, cu $I' \subset I$.

15. Fie I un interval centrat în $a \in \mathbb{R}$. Este adevărată afirmaţia „$x \in I \Rightarrow -x \in I$"?

1.3. Mulţimea $\mathbb{Q}$. Mulţimea $\mathbb{R}$. Mulţimi mărginite

Să observăm că între oricare două numere raţionale a şi b, $a < b$, există cel puţin un alt număr raţional.

De exemplu: $a < \dfrac{a+b}{m+n} < b$ sau $a < \sqrt{ab} < b$, $a > 0$, $b > 0$.

În aceeaşi ordine de idei, avem, de exemplu $a < \dfrac{m \cdot a + n \cdot b}{m+n} < b$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că între a şi b sunt o infinitate de numere raţionale. Cu toate acestea, între două numere raţionale diferite există şi numere iraţionale. De exemplu, $1{,}42 < \sqrt{2} < 1{,}45$.

Putem constata, deci, că mulţimea $\mathbb{Q}$ are „goluri”, ocupate de numerele iraţionale.

Spre deosebire de mulţimea $\mathbb{Q}$, mulţimea $\mathbb{R}$ are proprietatea că este „continuă”. Această deosebire între $\mathbb{Q}$ şi mulţimea $\mathbb{R}$ este garantată de axioma lui Cantor pe care am enunţat-o cu prilejul definirii mulţimii $\mathbb{R}$.

Să facem câteva consideraţii pentru a înţelege axioma lui Cantor.

Definiţie. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$. Un număr real M (respectiv m) este un *majorant* (respectiv *minorant*) al mulţimii A dacă $x \leq M$ (respectiv $x \geq m$), oricare ar fi $x \in A$.

Exemplu. Pentru mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leq 2\}$, numărul 0 este un minorant, iar numărul $\sqrt{2}$ este un majorant.

Definiţie. O mulţime $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ este mărginită dacă este *minorată* (adică are cel puţin un minorant) şi *majorată* (adică dacă are cel puţin un majorant).

De exemplu, mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 \leq 2\}$ este mărginită, minorată, de exemplu de 0, şi majorată, de exemplu de $\sqrt{2}$.

Definiţie. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$, o mulţime care admite şi minoranţi şi majoranţi. Cel mai mic majorant (respectiv cel mai mare minorant) se numeşte *margine superioară* (respectiv *margine inferioară*) a mulţimii A şi se notează $\sup A$ (respectiv $\inf A$) şi se citeşte „supremum de A” (respectiv „infimum de A”).

Observaţie. Dacă $\sup A = M \in A$ (respectiv $\inf A = m \in A$), spunem că M este cel mai mare element al mulţimii A (respectiv cel mai mic element al mulţimii A) şi se notează $M = \max A$ (respectiv $m = \min A$).

Exemplu. Fie mulţimile: $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. Avem: $\max B = \sqrt{2}$, deoarece $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, pe când $\max A$ nu există, deoarece cel mai mic majorant al mulţimii A, $\sqrt{2}$, nu aparţine mulţimii A.

Axioma lui Cantor se enunţă astfel: Orice mulţime majorată A, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \varnothing$ (respectiv minorată) posedă margine superioară (respectiv margine inferioară). În plus, marginea superioară (respectiv marginea inferioară) a unei mulţimi este unică.